TITLE:

Slice Maps And Multipliers Of Invariant Subspaces(Spaces of Analytic and Harmonic Functions and Operator Theory)

AUTHOR(S):

中路, 貴彦

CITATION:

中路, 貴彦. Slice Maps And Multipliers Of Invariant Subspaces(Spaces of Analytic and Harmonic Functions and Operator Theory). 数理解析研究所講究録 1996, 946: 70-77

ISSUE DATE:

1996-04

URL:

http://hdl.handle.net/2433/60244

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
946巻 1996年 70-77

Slice Maps And Multipliers Of Invariant Subspaces

北大理 中路貴彦 (Takahiko Nakazi)

Abstract : Let $\overline{D^2}$ be the closed bidisc and T^2 be its distinguished boundary. For $(\alpha, \beta) \in \overline{D^2}$, let $\Phi_{\alpha\beta}$ be a slice map, that is, $(\Phi_{\alpha\beta} f)(\lambda) = f(\alpha\lambda, \beta\lambda)$ for $\lambda \in D$ and $f \in H^2(D^2)$. Then $\ker \Phi_{\alpha\beta}$ is an invariant subspace, and it is not difficult to describe $\ker \Phi_{\alpha\beta}$ and $\mathcal{M}(\ker \Phi_{\alpha\beta}) = \{ \varphi \in L^\infty(T^2) : \varphi \ker \Phi_{\alpha\beta} \subset H^2(D^2) \}$. In this paper, we study the set $\mathcal{M}(M)$ of all multipliers for an invariant subspace M such that the common zero set of M contains that of $\ker \Phi_{\alpha\beta}$.

1章 定義

D^2 を open unit disc かつ T^2 をその distinguished boudary とする。dm を T^2 上の正規 Lebesgue measure とする。$1 \le p \le \infty$ に対して、$H^p(T^2) = H^p(D^2)$ を Hardy space かつ $L^p(T^2) = L^p(dm)$ を Lebesgue space

とする。

P_ζ を $\zeta \in D^2$ の Poisson 積分とする。$f \in H^p(T^2)$ に対して、$u(\log|f|)$ を $\log|f|$ の least harmonic majorant とすると、非負 singular measure $d\sigma_f$ が存在して、$\zeta \in D^2$ に対し $u(\log|f|)(\zeta) = P_\zeta(\log|f| + d\sigma_f)$ とできる。

$\zeta = (z, w) \in \mathbb{C}^2$ とする。M が $H^2(T^2)$ の invariant subspace とは M が $H^2(T^2)$ の零でない closed subspace で $zM \subseteq M$ かつ $wM \subseteq M$ となるときをいう。$\mathcal{M}(M) = \{\varphi \in L^\infty(T^2)\,;\ \varphi M \subseteq H^2(T^2)\}$ は invariant subspace M の multipliers の集合と呼ばれる。

$H^2(T^2)$ の invariant subspace M に対して、$\mathcal{Z}(M) = \{\zeta \in D^2\,;\ f(\zeta) = 0 \text{ for } f \in M\}$ かつ $\mathcal{Z}_\partial(M) = \inf\{-d\sigma_f\,;\ f \in M,\ f \not\equiv 0\}$ とする。

h は実2次元 Hausdorff measure をあらわす。

$(\alpha, \beta) \in \overline{D^2}$ について、$(\Phi_{\alpha\beta} f)(\lambda) = f(\alpha\lambda, \beta\lambda)$ $(\lambda \in D)$ とするとき、$\Phi_{\alpha\beta}$ は slice map と呼ばれる。

$f \in H^p(D^2)$ について、$f(\zeta) = \sum_{j=0}^\infty F_j(\zeta)$ は homogeneous expansion を表わす。ここで F_j は degree j の homogeneous polynomial である。$j = j(f)$ を $F_j \not\equiv 0$ である最小の j とするとき、j を $\zeta = (0,0)$

での f の zero の order と呼ぶ。f の $p \in D^2$ での zero の order とは $f(p+\zeta)$ の $\zeta=(0,0)$ での zero の order のことを意味する。

2章 問題

$H^2(T^2)$ の invariant subspace M の形を決定することが目的である。しかしそれはほとんど不可能であると多くの人が信じている。一方 $H^2(T)$ の invariant subspace M の形は完全に決定されている。

$\boxed{\text{Beurling の定理}}$ (1949)

M を $H^2(T)$ の invariant subspace とする。

(1) $M = g H^2(T)$ かつ $|g| = 1$ a.e.。

(2) $\mathfrak{m}(M) = g H^\infty(T)$ かつ $|g| = 1$ a.e.。

(3) $\mathfrak{m}(M) = H^\infty(T)$ である必要十分条件は $M = H^2(T)$ である。

(4) (1) または (2) で $g = BS$ と分解できる。

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1-\bar{z}_n z} \quad \text{かつ} \quad S(z) = \exp - \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\sigma(t)$$

であり、それぞれ Blaschke product かつ singular inner function と呼ばれる。このとき $\mathcal{Z}(M) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{z_n\}$

かつ $\mathcal{Z}_\partial(M) = -d\sigma$ となる。

Beurlingの定理の(1)は $H^2(T^2)$ ではtoo difficultであるが、(2)〜(4)を $H^2(T^2)$ の場合に研究する。

$\boxed{\text{問題}}$ M を $H^2(T^2)$ のinvariant subspaceとする。(a) $\mathcal{M}(M)$ を決定せよ。(b) $\mathcal{M}(M) = H^\infty(T^2)$ となる M を決定せよ。(c) $\mathcal{Z}_\partial(M) = 0$ のときに M を研究せよ。

$H^2(T^2)$ のとき、[3]で(a)と(b)は一般的に研究されたが、その結果は少し抽象的である。任意の $H^2(T^2)$ のinvariant subspace M に対して、$\mathcal{M}(M) \supseteq H^\infty(T^2)$。$M = g H^2(T^2)$ かつ $|g| = 1$ ならば、$\mathcal{M}(M) = \bar{g} H^\infty(T^2)$。もし $\dim(H^2(T^2) \ominus M) < \infty$ ならば、$\mathcal{M}(M) = H^\infty(T^2)$ となることを示すのはやさしい。

$\boxed{\text{Douglas - Yan の定理}}$ (1990)

M を $H^2(T^2)$ のinvariant subspaceとせよ。もし $\mathcal{Z}(M) = 0$ かつ $\mathcal{Z}_\partial(M) = 0$ なら、$\mathcal{M}(M) = H^\infty(T^2)$

となる。

Hardy空間 $H^p(D^2)$ の研究において、slice map $\Phi_{\alpha\beta}$ は重要である。次の定理は $(\alpha, \beta) \in D \times T \cup T \times D$ ならば $H^2(D^2)$ から $H^2(D)$ の上への写像となることを示すことができる[5]。$\ker \Phi_{\alpha\beta}$ は $\Phi_{\alpha\beta}$ の kernel を示す。

Rudin の定理

$(\alpha, \beta) \in T^2$ のとき、$\Phi_{\alpha\beta}$ は $H^2(D^2)$ から Bergman 空間 $L_a^2(D)$ の上への縮小写像である。

問題　(a)　$H^2(D^2)$ の invariant subspace $\ker \Phi_{\alpha\beta}$ を研究せよ。(b)　$H^2(D^2)$ の invariant subspace M で $\mathcal{Z}(M) = \mathcal{Z}(\ker \Phi_{\alpha\beta})$ となるものを研究せよ。

3章　定理

$(\alpha, \beta) \in \overline{D^2}$ に対して、$\mathcal{D}_{\alpha\beta} = \{(\alpha\lambda, \beta\lambda) \in D^2 ; \lambda \in \mathbb{C}\}$ とせよ。$h(\mathcal{D}_{\alpha\beta}) > 0$ である。任意の$(\alpha, \beta) \in \overline{D^2}$ のとき、定理１によって $H^2(D^2)$ の invariant subspace M で $M \supseteq \ker \Phi_{\alpha\beta}$ のとき、その multiplier set $\mathcal{M}(M)$ が決定される。定理２では $M \not\supseteq$

$\ker \Phi_{\alpha\beta}$ のときに $\mathcal{M}(M)$ を研究している。

$\boxed{\text{定理 1}}$ $(\alpha, \beta) \in \overline{D^2}$ のとき次の(1)～(4)が成立する。

(1) 任意の $r \in (0, 1]$ に対して、$\ker \Phi_{\alpha\beta} = \ker \Phi_{r\alpha, r\beta}$ 。

(2) $\mathcal{Z}(\ker \Phi_{\alpha\beta}) = \mathcal{D}_{\alpha\beta}$ かつ $\mathcal{Z}_\partial(\ker \Phi_{\alpha\beta}) = 0$ 。さらに任意の $p \in \mathcal{D}_{\alpha\beta}$ について、$\beta z - \alpha w \in \ker \Phi_{\alpha\beta}$ は p で order 1 の zero である。

(3) $(\alpha, \beta) \in T^2$ ならば $\mathcal{M}(\ker \Phi_{\alpha\beta}) = H^\infty(D^2)$ であり、$(\alpha, \beta) \in T \times D \cup D \times T$ ならば $\mathcal{M}(\ker \Phi_{\alpha\beta}) = (\beta z - \alpha w)^{-1} H^\infty(D^2)$ である。

(4) M が $H^2(D^2)$ の invariant subspace でありかつ $M \supsetneq \ker \Phi_{\alpha\beta}$ ならば $\mathcal{M}(M) = H^\infty(D^2)$ である。

$\boxed{\text{定理 2}}$ $(\alpha, \beta) \in \overline{D^2}$ かつ M は次の(i)～(iii)を満足する $H^2(D^2)$ の invariant subspace とする。

(i) 任意の $p \in \mathcal{Z}(M) \cap \mathcal{D}_{\alpha\beta}$ に対して、p で order 1 の zero をもつ $f \in M$ が存在する。

(ii) $h(\mathcal{Z}(M) \cap \mathcal{D}^c_{\alpha\beta}) = 0$.

(iii) $\mathcal{Z}_\partial(M) = 0$ 。

このとき、次の(1)と(2)が成立する。

(1) $(\alpha, \beta) \in T^2$ ならば $\mathfrak{m}(M) = H^\infty(D^2)$.

(2) $(\alpha, \beta) \in T \times D \cup D \times T$ かつ $\mathcal{Z}(M) \supseteq \mathcal{D}_{\alpha\beta}$ ならば $\mathfrak{m}(M) = (\beta z - \alpha w)^{-1} H^\infty(D^2)$.

4章 注意と参考文献

定理はもっと一般的に、たとえば $H^2(D^n)$ またはある composition map について証明できる。

この講演は degree 1 の homogeneous polynomial の零点と invariant subspace が関係している場合である。更の研究として、degree 1 の polynomial や degree 2 の homogeneous polynomial の零点と関係している場合があるが、これはまだなされていない。

参考文献

[1] A.Beurling , On two problems concerning linear transformations in Hilbert space, Acta Math. 81 (1949), 239 - 255 .

[2] R.G. Douglas and K. Yan , On the rigidity of Hardy submodules , Integral Eq. Op. Th. 13 (1990) , 350 - 363 .

[3] T. Nakazi, Multipliers of invariant subspaces in the bidisc, Proc. Edinburgh Math. Soc. 37 (1994), 193-199.

[4] W. Rudin, Function Theory in Polydisks, Benjamin, New York (1969).

[5] T. Nakazi, Slice maps and multipliers of invariant subspaces, to appear in Canad. Math. Bull.